

Il campo numerico nella sua forma più ampia risulta da successivi ampliamenti di campi numerici limitati.

- I numeri interi servono per *contare* oggetti.
I numeri interi servono anche per misurare grandezze, ma solo nel caso in cui la grandezza unitaria è contenuta esattamente nella grandezza da misurare.
In tutti gli altri casi i numeri interi non sono adatti a misurare, e **occorre ampliare il campo dei numeri interi** con i numeri razionali.
- I numeri razionali servono per *misurare* grandezze, cioè stabilire quante volte una grandezza G contiene un'altra grandezza g omogenea con la prima.
In molti casi, il processo di misura porta ad un numero risultante dal rapporto tra due numeri interi, che è sempre scrivibile come numero decimale.
Ma in molti altri casi il numero che risulta dalla misura non è scrivibile come rapporto tra due numeri interi. Ad esempio se assumiamo come unità di misura il lato di un quadrato, la misura della sua diagonale non è scrivibile come numero decimale, perché risulta avere un numero infinito di cifre, e la successione dei decimali non ha alcuna periodicità.
Quindi i numeri razionali non sono sufficienti **in tutti i casi** per *misurare* grandezze: e **occorre ampliare il campo dei numeri razionali con i numeri "irrazionali"**, che risultano dalla misura di grandezze "incommensurabili", come appunto la diagonale ed il lato di un quadrato.
I numeri irrazionali sono soluzioni di equazioni algebriche. Ad esempio, il numero $\sqrt[3]{2}$ (appunto la misura della diagonale del quadrato rispetto al suo lato) è una soluzione dell'equazione algebrica $x^2-2=0$.
- **Ma non è tutto**, perché esistono dei numeri che non sono interi, non sono razionali, e non sono neanche irrazionali, Ad esempio il numero che dà la misura della circonferenza rispetto al suo raggio, non è soluzione di alcuna equazione algebrica, quindi non è irrazionale: è di una razza ancora diversa, chiamata dei numeri trascendenti. Essi sono soluzioni di equazioni non algebriche ma trascendenti.

Le equazioni algebriche comportano gli operatori aritmetici (quattro operazioni, elevazione a potenza e radice); le equazioni trascendenti comportano anche gli operatori trascendenti: logaritmo, esponenziale, funzioni trigonometriche.

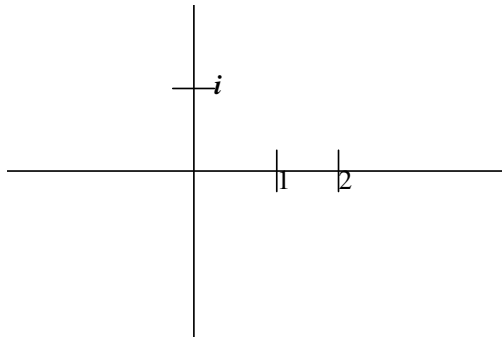
Il campo numerico risultante da tutti questi successivi ampliamenti è il **campo dei numeri reali, o campo reale**.

Il campo reale è rappresentabile con una retta, ad ogni punto della quale corrisponde un numero intero, razionale, o reale. Esiste un completo armamentario di teoremi che dimostrano la corrispondenza biunivoca e completa tra la retta e il campo reale, la sua compattezza ecc ecc. Il campo reale però non contiene ancora tutte le soluzioni di tutte le possibili equazioni. Ad esempio, l'equazione $x^2+2=0$ ovvero $x^2=-2$ non ha soluzioni reali, perché nessun numero reale al quadrato dà un numero negativo.

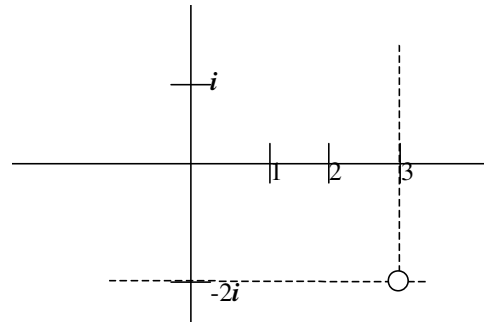
- **ampliamo ulteriormente il campo numerico, per includere le soluzioni di equazioni algebriche del tipo $x^2=-2$**

A questo scopo occorre un salto mentale ardito, un'astrazione nel vero senso della parola, cioè la rinuncia alla consueta corrispondenza tra "numero" e "realtà" (contare, misurare...)
Decolliamo dalla matematica dei geometri e dei ragionieri a quella dei matematici, che prescinde dall'esistenza del proprio oggetto.

Immaginiamo che la radice quadrata del numero -1 che non esiste nel campo reale, esista invece in un campo più ampio, che chiamiamo campo complesso. Chiamiamo questo numero inesistente, "unità immaginaria". Nella retta dei numeri reali non troveremo certamente questa unità. La collocheremo su un'altra retta, perpendicolare alla retta reale, e che la interseca in corrispondenza dello zero. Giusto perché tutto abbia un nome, la battezziamo i .



l'Unità Immaginaria



Il numero complesso (3-2i) 1

Questo ultimo ampliamento è grandioso, perché fa passare da un campo numerico mono dimensionale a un campo numerico bidimensionale.

Come un qualunque punto della retta reale è un numero reale, così qualunque punto del “piano complesso” è un **numero complesso**, con due componenti: la parte reale, che sta sull’asse reale, e la parte immaginaria, che sta sull’asse immaginario. I numeri reali appaiono così come particolari numeri complessi, privi di parte immaginaria.

Questo sforzo ha una remunerazione straordinariamente generosa. Infatti l’uso delle funzioni di variabile complessa è lo strumento matematico principale dell’elettrotecnica e dei fenomeni ondulatori, e la fa da padrone in tutti indistintamente i settori della fisica matematica.

Salta all’occhio immediatamente l’analogia tra i numeri complessi ed i vettori nel piano, cosicché ogni vettore può essere rappresentato da un numero complesso. Tutti i concetti tipici delle onde trovano analogie perfette nel campo dei numeri complessi, ed esistono dei teoremi fondamentali dovuti a Eulero, che pongono in corrispondenza le funzioni trigonometriche con gli esponenziali di variabile complessa.

Un vettore che ruota nel piano cambia la sua *fase*, cioè la sua inclinazione rispetto a un asse preso come origine. Il corrispondente della fase nel campo complesso è il rapporto tra la parte immaginaria e la parte reale del numero complesso corrispondente al vettore.

Invece il corrispondente del modulo (lunghezza) del vettore è il modulo del numero complesso, cioè la lunghezza della freccia che unisce l’origine al punto del piano complesso che corrisponde al numero stesso. Nel caso del numero $(3-2i)$ il modulo è $\sqrt{13}$ (Teorema di Pitagora), la sua fase è l’angolo che ha per tangente $-2/3$

Qualche esempio di applicazione concreta.

In elettrotecnica un qualsiasi circuito ha una impedenza che si rappresenta con un numero complesso. La parte reale del numero complesso è la resistenza ohmica pura, che provoca una caduta di tensione ai suoi estremi quando il circuito è percorso da corrente, la parte immaginaria è la reattanza, che provoca un ritardo di fase o un anticipo di fase della tensione sulla corrente ogni volta che la corrente varia nel tempo. Per la misura di questo sfasamento serve dunque un numero immaginario.

Tutta la matematica dell’elettrotecnica, campo assai tangibile, dal trasformatore dell’albero di Natale all’alternatore da 10 Megawatt ai magneti superconduttori del CERN, si gioca sui numeri immaginari. Non male per degli enti inesistenti. Molto meglio degli Enti Inutili, che purtroppo esistono.

Tutta la trigonometria piana e sferica può essere scritta usando, al posto delle comuni funzioni trigonometriche di variabile reale (seno coseno e tutti gli altri), la funzione esponenziale della

variabile complessa, e non credere che sia una civetteria da matematici vanitosi: è impossibile dare un'idea di quanto sia comoda ed efficace la notazione esponenziale complessa in matematica.

Se i numeri complessi sono utili nei campi concreti, figuriamoci nel regno delle teorie fisiche. In fisica teorica lo stato di una particella legata (ad esempio un elettrone nel campo elettrico del nucleo, o un nucleone nel campo nucleare), è completamente descritto da una funzione di variabile complessa. Ogni altro fenomeno visibile e non dell'elettronica è completamente descritto da funzioni di variabile complessa, compreso l'effetto tunnel che permette ai circuiti di questo computer di funzionare e a te di leggere le scemenze che scrivo.